The Mathematical Intelligencer

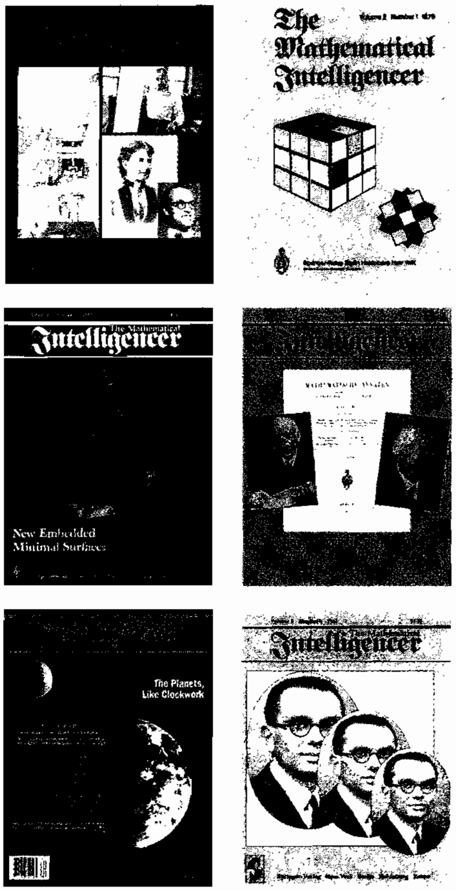
季刊『マセマティカル・インテリジェンサー』選集

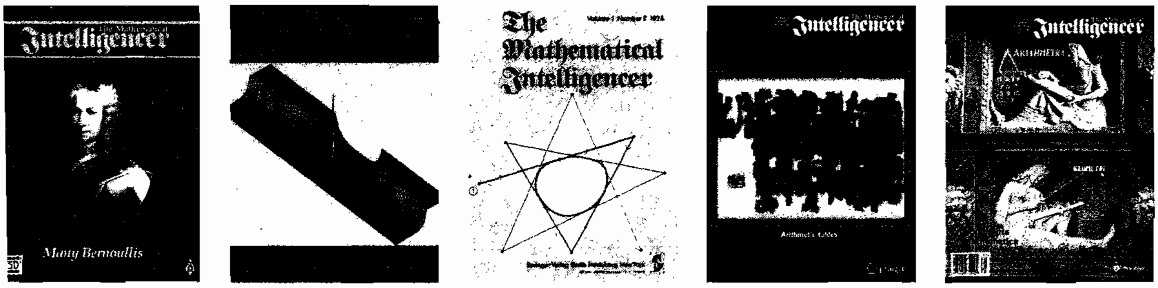
数学を語ろう!

❷ 代数・数論 数学史篇

R.ウィルソン／J.グレイ 編

三宅克哉 訳





Springer
シュプリンガー・フェアラーク東京

10
四元数行列式

ヘルマー・アスラクセン

はじめに

古典的な行列群は幾何学と代数学の多くの部門で基本的な重要性を担っている．それらのうちのいくつか —— たとえば $Sp(n)$ —— は四元数行列の群として定義するならば最も概念的な形で把握することができる．しかし四元数環は可換ではないので，線型代数学のいくつかの様相を再考察しなければならない．特に，四元数環上の行列の行列式をどのように定義するかについては必ずしも明白とは言えない．何年にもわたって何人もが異なった定義を与えてきた．この論説ではこれらのいくつかを論じることにする．

まず始めに，四元数についての基本的な事柄をいくつか述べよう．四元数は 1843 年 10 月 16 日にウィリアム・ローワン・ハミルトン卿によって発見された．(さらなる歴史については，[19], [31], [47] および [48] を薦める．) それらは実数体 $\mathbb{R}$ 上の非可換で結合的な多元環を形成する．四元数環は

$$\mathbb{H} = \{a + ib + jc + kd \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

であって，乗法について

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k = -ji, \quad jk = i = -kj, \quad ki = j = -ik$$

を満たす．また $z \in \mathbb{H}$ を $z = x + jy$, $x, y, \in \mathbb{C}$ の形でも表せるが，この場合，$y \in \mathbb{C}$ に対して $yj = j\bar{y}$ であることを忘れてはならない．また $\mathbb{H}$ は $\mathbb{C}$ 上の多元環ではないことに注意してほしい．実際，$\mathbb{H}$ の中心は単に $\mathbb{R}$ であ

る．四元数環 $\mathbb{H}$ における共役は，$\overline{a+ib+jc+kd}=a-ib-jc-kd$ で定義され，$\overline{uv}=\bar{u}\bar{v}$ を満たす．特に $ib+jc+kd$, $b,c,d \in \mathbb{R}$ の形の四元数を**純四元数**と呼ぶことにする．

環 R に対して，$R^{\times}$ で R の単元，すなわち，R の可逆元の集合を表す．もし R が斜体であるならば，$R^{\times}=R-\{0\}$ である．サイズが $n \times n$ で成分が R に属するような行列全体の環を $M(n,R)$ と表す．また R 上の可逆な $n \times n$ 行列の集合を $GL(n,R)$ と表す．(読者の中にはこの $M(n,\mathbb{H})$ での可逆性の定義について気になる人がいるかもしれない．左逆元と右逆元の間に違いがあるのではないか？ 後で見るように，このような問題は生じない．また [15] と [32] を参照されたい.)

ケイリー

四元数行列の行列式を定義しようとするとき，最も無邪気なアプローチは通常の公式を用いることであろう．しかしその場合には疑問が生じる．通常の公式というのはどれなのか？ たとえば，2×2 行列式の場合，$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$（最初の行に関する展開）とか $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$（最初の列に関する展開），あるいは通常の公式の因子を何か別の順序にするとか．現代の数学者にとっては，簡明なやり方が欠けているということは，これが正しいアプローチではないということになる．しかし，それでも自問したくなるかもしれない．もしこれらの公式の 1 つを試みれば，何が起こるのだろう？

1845 年，ハミルトンによる四元数の発見のわずか 2 年後に，アーサー・ケイリー [10, 35] はまさにこれを実行した．彼はもとの行列とすべての小行列の展開式を最初の列（あるいは，彼の言う垂直の行）に沿って行うことを選んでみた．このケイリーの行列式を Cdet と書くことにしよう．そうすれば，

$$\mathrm{Cdet}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

および

$$\mathrm{Cdet}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

が得られる．これはよい定義であろうか？ ケイリー自身が指摘しているように，もし 2×2 行列で，2 つの行が同じであれば

$$\mathrm{Cdet}\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = ab - ab = 0$$

であるが，もし 2 つの列が等しければ

$$\mathrm{Cdet}\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} = ab - ba$$

であって，一般にこれは 0 でない．何らかの理由から，ケイリーはこれを気にしていた様子はなく，この新しい関数について彼は屈託なくさらに 2 ページを書き続けている．しかし我々には気になる．

この状況をはっきりさせようとする前に，まず行列式にどのような性質を持たせたいかを決定しよう．複素行列についての経験に基づいて，写像 $d : M(n, \mathbb{H}) \to \mathbb{H}$ が次の 3 つの公理を満たすときに行列式と呼ぼう．

公理 1. $d(A) = 0 \Longleftrightarrow A$ は正則でない．

公理 2. $d(AB) = d(A)\,d(B) \quad (A, B \in M(n, \mathbb{H}))$.

公理 3. A' が A から，ある行の左スカラー倍を他の行に加えるか，ある列の右スカラー倍を他の列に加えることによって得られるならば，$d(A') = d(A)$ である．

これらの公理についていくつかのコメントをしておこう．もし d が常に 0 か 1 という値をとるのでなければ，公理 2 から，すべての正則でない行列 A に対して $d(A) = 0$ が示される（[7] 参照）．したがって，正則な行列に対して行列式を定義すればよい．

公理 3 ではスカラー倍について，左と右の区別をしていることに注意してほしい．写像 $T(v) = cv$ を考えよう．このとき，$f \in \mathbb{H}$ に対して，

$$T(fv) = c(fv)$$

は，一般には

$$f\,T(v) = f(cv)$$

とは異なるが，他方

$$T(vf) = c(vf) = (cv)f = T(v)f$$

である．これから，線型変換の係数は線型空間のスカラー倍の構造で用いるのとは逆の側に書かなければならないことがわかる．この論説では行列の列と線型空間のベクトルとを同一視し，線型変換を行列の左からの積と同一視する．しかし線型空間にはすべて右からスカラーが作用するものとする．

公理 3 は行列の乗法によっても表される．まず e_{ij} を (i,j) 成分にだけ 1 が入り，他はすべて 0 が入っている行列とする．次に

$$B_{ij}(b) = I_n + be_{ij} \quad (i \neq j)$$

と定義する．行列 A に $B_{ij}(b)$ を左から掛ければ，A の第 i 行に第 j 行の左からの b 倍を加えることになり，右から掛けると，A の第 j 列に第 i 列の右からの b 倍を加えることになる．したがって，(公理 2 を使えば) 公理 3 は $d(B_{ij}(b)) = 1$, $1 \leq i,j \leq n$, $i \neq j$ ということと同じである．

容易にわかるように，

$$B_{ij}(b)^{-1} = B_{ij}(-b)$$

であるから，$B_{ij}(b)\,(1 \leq i,j \leq n, i \neq j)$ たちの積で $GL(n,\mathbb{H})$ の部分群を生成することになる．この部分群を $SL(n,\mathbb{H})$ と表す．体 K に対しては，$SL(n,K)$ を行列式が 1 である行列全体の群として定義する．しかし，今は行列式がまだ定義されていないから，まず $SL(n,\mathbb{H})$ を別の形で定義しなければならず，願わくば，後で行列式が定義されたときに $SL(n,\mathbb{H})$ がその核であることを望むことになる．したがって，公理 3 を $SL(n,\mathbb{H})$ の行列の行列式が 1 であると言い直すことができるから，まずは脈ありということになる．

眼前の問題は，果たしてこのような行列式が存在するかどうかである．まず単純な障害を述べよう．

定理 1. 行列式 d が存在すると仮定する．すなわち，写像 $d: M(n,\mathbb{H}) \to \mathbb{H}$ が上の 3 つの公理を満たすとする．このとき，d の像 $d(M(n,\mathbb{H}))$ は $\mathbb{H}$ の可換な部分集合である．

この定理が本質的に述べるところは，四元数行列式を定義しようとすると，それは複素数値にならざるを得ないということである．よって，ケイリーの定義は退けられることになる．実際，Cdet は $\mathbb{H}$ の上への写像である．

定理 1 の証明は次の 2 つの補助定理によっている．まず $B_{ij}(b)$ の定義には単に 2 つの添え字しか関わっていないことに注意しよう．したがって，$n=2$ と仮定することが多いが一般性を失わない．簡単な計算で次の補助定理が証明される．

補助定理 2. 行列式 d と $a \in \mathbb{H}, a \neq 0$ に対して次が成り立つ：

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

および

$$d\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\right) = 1.$$

次の補助定理が決定的である．

補助定理 3. 群 $GL(n,\mathbb{H})$ の要素 A は必ず次のように表される：

$$A = D(x)B.$$

ただし $x \in \mathbb{H}$ に対して

$$D(x) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & x \end{pmatrix}$$

であり，$B \in SL(n,\mathbb{H})$ である．

証明. 行列 A は逆行列を持つから，第 1 行の成分の中に 0 でないものが

少なくとも1つはなければならない．その1つを $a_{1j} \neq 0$ としよう．第1列に第 j 列の右からの $a_{1j}^{-1}(1-a_{11})$ 倍を加えて，(1,1) 成分が1である行列が得られる．次いで第1行の他の列の成分を，第1列の右からのスカラー倍を加えてすべて0にすることができる．次に第2行に移り，(数学的帰納法によって) 求める結果が得られる．

注意深い読者はこの分解 $A = D(x)B$ が1通りに限るかどうか気になるだろう．しかし，定理1の証明の方が急務である．

定理1の証明． 写像 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ を

$$f(x) = d(D(x))$$

によって定義する．補助定理3から，$f(\mathbb{H}) = d(M(n, \mathbb{H}))$ である．記号を簡単に処理するために，$n = 2$ とする．このとき，

$$d\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = d\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\right) = f(x)$$

が公理2と補助定理2から得られる．そうすると

$$\begin{aligned} f(x)\,f(y) &= d\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}\right) = d\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \\ &= d\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = f(y)\,f(x) \end{aligned}$$

であり，$f(\mathbb{H}) = d(M(n, \mathbb{H}))$ が可換であることがわかる．

さてここでケイリーの定義がこれとどのように適合しているかを検討しよう．彼の定義は3つの公理をすべて満たすわけではない．事実としては，どの1つも満たしていない！ 行列

$$M = \begin{pmatrix} k & j \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

を取り上げよう．容易に証明できるのだが，もし

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であれば $x = y = 0$ である．よって M は可逆である．ところが

$$ {}^tM \begin{pmatrix} -1 \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} $$

であり，${}^tM$ は可逆でない．ただし，${}^tM$ は M の転置行列である．しかるに，$\mathrm{Cdet}\, M = 0$, $\mathrm{Cdet}\, {}^tM = 2k$ である．よって公理 1 は満たされないことがわかる．この例はまた転置行列が四元数線型代数にとっては有用なものではないことを示している．それは同型写像でも反同型写像でもない！(しかし，エルミート的な $M^* = {}^t\bar{M}$ は反同型写像である．すなわち，$(MN)^* = N^*M^*$ である.）同様な理由から，階数の概念ももっと煩雑である．右列階数は左行階数と一致するが，それらは必ずしも左列階数（これは右行階数と等しい）とは一致しない ([12])．また

$$ \mathrm{Cdet}\left(\begin{pmatrix} 1 & i \\ j & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & j \\ i & 1 \end{pmatrix} \right) = 2 - 2k $$

であるが

$$ \mathrm{Cdet} \begin{pmatrix} 1 & i \\ j & k \end{pmatrix} \mathrm{Cdet} \begin{pmatrix} k & j \\ i & 1 \end{pmatrix} = 0 $$

であることに注意すると，公理 2 も満たされないことになる．

公理 3 については，

$$ \mathrm{Cdet} \begin{pmatrix} ab & b \\ a & 1 \end{pmatrix} = 0 $$

であるが，この行列の 2 番目の行を左から b 倍して 1 番目の行から引くと

$$ A' = \begin{pmatrix} ab - ba & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} $$

となり，$\mathrm{Cdet}(A') = ab - ba$ であるが，これは必ずしも 0 とは限らない．

このことは，Cdet が我々のとるべき道ではないことを明示している．もっとよさそうなお手本が補助定理 3 にある．後でこれを見ることにしよう．

この節を終わるに当たって，定理 1 についての注意をしておこう．この定理は物理学者で数学者でもあるフリーマン・J・ダイソン [21] によって 1972 年に証明された関連する定理に触発されたものである．彼は別の公理 $3'$ を用

いた．

公理 3′． 四元数行列 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$ において，もしある行の添え字 r について

$$a_{ij}=b_{ij}=c_{ij}\ (i\neq r), \qquad a_{rj}+b_{rj}=c_{rj}$$

であるならば，

$$d(A)+d(B)=d(C)$$

である．

言い換えれば，写像 d は行に関して加法的であるとするわけである．そして彼は d が公理 1, 2, 3′ を満たすならばその像は可換であることを証明した．公理 1, 2, 3′ から公理 3 が得られることは容易に見てとれる．実際，$d(B_{ij}(b))=1$ を証明すれば十分である．そこで B' を $B_{ij}(b)$ の第 i 番目の対角成分を 0 で置き換えて得られる行列とすれば，これは可逆でない．よって，公理 3′ から $d(B_{ij}(b))=1$ が得られる．

したがって，彼の行列式の定義は我々のものよりも制限的である．しかし，実際には制限的に過ぎる．彼の 3 つの公理を満たすような行列式は本当は四元数上では存在しない！ なぜか？ 公理 2 から $d(I_n)=1$ である．そこで

$$D(x)=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & x\end{pmatrix}$$

を考える．行列 $I_n+D(-1)=2D(0)$ は可逆ではないので，公理 1 と 3′ から，$d(D(-1))=-1$ がわかる．一方，$-1=iji^{-1}j^{-1}$ であるから，$D(-1)=D(i)D(j)D(i)^{-1}D(j)^{-1}$ であり，$D(-1)$ は $GL(n,\mathbb{H})$ の交換子群に属している．よって公理 2 と定理 1 から $d(D(-1))=1$ となるが，これは矛盾である．

シュトゥディ

四元数行列式に関しては，ケイリー後の75年にわたっては何も大したことは起こらなかった．W.R. ハミルトンの著書『四元数の要素』(*Elements of Quaterniuns*)[24] の第2版が彼の歿後の1889年に出版され，編集者が付録をつけたが，それはケイリーの論文を単に再録したものであった．また1899年のJ.M. パースの論文 [38] はケイリーの行列式についての単なる労を惜しまない詳述であった．しかし1920年にエドゥアルト・シュトゥディのなかなか興味のある論文 [44] が現れた．(もう少し踏み込んだ詳細については，[16], [23] および [46] を参照.) 彼のアイデアは $n\times n$ 四元数行列を $2n\times 2n$ 複素行列に変換して行列式をとるものであった．

まず，四元数，複素数，および，実数の行列の間のいくつかの重要な準同型写像の検討から始めよう．サイズが $n\times n$ の複素行列はいずれも2つの実 $n\times n$ 行列 C, D を用いて $N = C + iD$ の形にただ1通りに表されることを思い出そう．これを用いて単射の環準同型写像 $\phi: M(n,\mathbb{C}) \to M(2n,\mathbb{R})$ が

$$\phi(C+iD) = \begin{pmatrix} C & -D \\ D & C \end{pmatrix}$$

で定義できる．そこで

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

と置く．線型空間 $\mathbb{C}^n$ での右からの i 倍を R_i としよう．対応する行列は iI で，$J = \phi(iI) = \phi(R_i)$ である．(ときとして，線型変換とその標準的な行列表示とを同一視する.) この J によって $\mathbb{R}^{2n}$ 上に複素構造が与えられ，よく知られているように，$P \in M(2n,\mathbb{R})$ が複素線型変換と対応するための必要十分条件は，P がこの複素構造を与える J と可換であることである．したがって，

$$\phi(M(n,\mathbb{C})) = \{P \in M(2n,\mathbb{R}) \mid JP = PJ\}$$

である．

同様に，四元数上の $n\times n$ 行列はどれも複素 $n\times n$ 行列 A, B によってた

だ1通りに $M=A+jB$ と表される.（ここで j を左に置くのは右線型空間を考えているからである.）したがって，準同型写像 $\psi: M(n,\mathbb{H}) \to M(2n,\mathbb{C})$ が

$$\psi(A+jB) = \begin{pmatrix} A & -\bar{B} \\ B & \bar{A} \end{pmatrix}$$

で定義できる．とにかく真っ正直にやって行けば，この写像が環準同型写像で単射であることが示される．[このことから特に，$GL(n,\mathbb{H})$ では左逆元と右逆元の区別は必要ないことがわかる.]

さて，R_j を $\mathbb{H}^n$ への右からの j 倍とする．注意すべきこととして，$\mathbb{H}$-線型変換はどれも R_j と可換であるが，R_j 自身は $\mathbb{H}$-線型変換ではない．したがって，R_j と対応する行列はないし，$\psi(R_j)$ などと表す意味はない．しかしそれでも $\mathbb{C}^{2n}$ 上では R_j と対応する写像 $\bar{R}_j(x,y)=(-\bar{y},\bar{x})$ が考えられる．この $\bar{R}_j$ は，まず J を掛け，それから複素共役をとるということと対応していることがわかる．これによって $\mathbb{C}^{2n}$ 上に四元数構造が入り，よく知られているように，$N \in M(2n,\mathbb{C})$ が四元数線型変換と対応するための必要十分条件は，N がこの四元数構造を与える $\bar{R}_j$ と可換であることである．実際，複素共役については $N\overline{Jv} = \overline{\bar{N}Jv}$ であるから，$N\overline{Jv} = \overline{JNv}$ であるための必要十分条件は，$\bar{N}J = JN$ である．よって

$$\psi\left(M(n,\mathbb{H})\right) = \left\{ N \in M(2n,\mathbb{C}) \;\middle|\; JN = \bar{N}J \right\} \tag{1}$$

である．これは $\mathbb{H}$ の中での $z \in \mathbb{C}$ に対する公式 $jz = \bar{z}j$ の単なる一般化であることを注意しておく．

この (1) から直ちに $\det_{\mathbb{C}} \psi(M) \in \mathbb{R}$ が得られるが，すぐ後で，事実として，$\det_{\mathbb{C}} \psi(M) \geq 0$ を示す.（ときに応じて，実行列ないしは複素行列の行列式であることを強調して $\det_{\mathbb{R}}$ とか $\det_{\mathbb{C}}$ と表す.）

上の $n=1$ の場合の準同型写像 $\phi_1: \mathbb{C} \cong M(1,\mathbb{C}) \to M(2,\mathbb{R})$ を $M \in M(n,\mathbb{C})$ の各成分に働かせて，写像 $\bar{\phi}: M(n,\mathbb{C}) \to M(2n,\mathbb{R})$ が得られる．[上の $\phi(N)$ は4個の n-ブロックからできているが，$\bar{\phi}(N)$ の方は n^2 個の2-ブロックからなっている.] ここで重要なことは $\bar{\phi}(N)$ の2-ブロックの方が $\phi(N)$ の n-ブロックよりも扱い易いということである．環 $\mathbb{C}$ は可換であり，ϕ_1 は同型写像であるから，$\bar{\phi}(N)$ の2-ブロックたちは互いに可換である．こ

のことから，次のよく知られた定理が使える．[この定理は幾度となく再発見されたが，私の知識の及ぶ範囲で元をたどれば，M.H. イングラハム [26] にまでさかのぼる.]

定理 4. 正方ブロック行列 $A = (A_{ij})$ の (i, j) 成分 A_{ij} がすべて互いに可換な $m \times m$ 行列であるとき，これらの A_{ij} を要素と見なした A の行列式で表される $m \times m$ 行列を B とすれば，スカラー上での行列式について $\det A = \det B$ が成り立つ．

たとえば，正方行列 $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ がそれぞれ互いに可換であるならば，

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \det(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})$$

である．言い換えれば,「行列式を 2 回とって」計算できるわけである．

行と列を適当に入れ替えて，$\det_{\mathbb{R}} \phi(N) = \det_{\mathbb{R}} \bar{\phi}(N)$ が得られ，次に定理 4 を適用すれば，$N \in M(n, \mathbb{C})$ に対して

$$\begin{aligned} \det_{\mathbb{R}} \phi(N) &= \det_{\mathbb{R}} \bar{\phi}(N) = \det_{\mathbb{R}} (\phi_1(\det_{\mathbb{C}} N)) \\ &= \det_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\det_{\mathbb{C}} N & -\operatorname{Im}\det_{\mathbb{C}} N \\ \operatorname{Im}\det_{\mathbb{C}} N & \operatorname{Re}\det_{\mathbb{C}} N \end{pmatrix} \qquad (2) \\ &= |\det_{\mathbb{C}} N|^2 \end{aligned}$$

が得られる [6]．この議論によって次の重要な定理が得られる．

定理 5. 複素正方行列 N に対して

$$\det_{\mathbb{R}} \phi(N) = |\det_{\mathbb{C}} N|^2 \geq 0 \qquad (3)$$

が成り立つ．また，四元数正方行列 M に対して

$$\det_{\mathbb{C}} \psi(M) = \sqrt{\det_{\mathbb{R}} \phi\,(\psi(M))} \geq 0 \qquad (4)$$

が成り立つ．

証明. 前半は (2) から従う．また，(1) から $\det_{\mathbb{C}} \psi(M) \in \mathbb{R}$ であり，さらに $\det_{\mathbb{R}} \phi(GL(n, \mathbb{H}))$ は $\mathbb{R}$ の連結部分集合に属しているから，四元数行列

M に対しては $\det_{\mathbb{R}} \phi(\psi(M)) \geq 0$ である．したがって，(4) は (2) から得られる．

これでようやくシュトゥディの行列式 Sdet を定義することができる：

$$\operatorname{Sdet} M = \det_{\mathbb{C}} \psi(M).$$

直ちに気になる問題は，このシュトゥディの行列式がどの公理を満たすか，ということであろう．シュトゥディ行列式は公理 2 を満たす．というのは，ψ は準同型写像だからである．次に公理 1 が満たされることを示そう．（このことの証明としてモートン・L・カーティス [16] の 2 つの版にあるものは，いずれも間違っていることを注意しておく．これを除けば彼の本は秀逸である．）まずわかっていることとして，もし $\operatorname{Sdet} M = \det_{\mathbb{C}} \psi(M) \neq 0$ であるならば，$\psi(M)$ は $M(2n, \mathbb{C})$ の中で可逆である．しかし，その逆元が実際に $\psi(M(n, \mathbb{H}))$ に含まれているかどうかを見なければならない．そこで公式 $J\psi(M) = \overline{\psi(M)}\,J$ の逆元の共役をとれば，$J\psi(M)^{-1} = \overline{\psi(M)^{-1}}\,J$ が得られる．したがって，(1) によって，$\psi(M)^{-1}$ が $\psi(M(n, \mathbb{H}))$ に含まれていることがわかる．

公理 3 が満たされていることを示すためには，$\operatorname{Sdet} B_{ij}(b) = 1$ を証明すれば十分である．さて，$b = b_1 + jb_2$，$b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ とすると，

$$\psi(B_{ij}(b)) = \begin{pmatrix} I_n + b_1 e_{ij} & -\bar{b_2} e_{ij} \\ b_2 e_{ij} & I_n + \bar{b_1} e_{ij} \end{pmatrix}$$

である．ただし，e_{ij} は (i, j) 成分だけが 1 でその他の成分はすべて 0 の $n \times n$ 行列であった．ところが，$i \neq j$ ならば $e_{ij}e_{ij} = 0$ であるから，定理 4 によって $\det(\psi(B_{ij}(b))) = \det(I_n) = 1$ が得られる．

このように，シュトゥディ行列式は我々の公理をすべて満たし，微分幾何学およびリー理論でしばしば用いられている [23]．十分に心得て置かなければならないことは，これは成分の **2 次関数**であり，通常の行列式とは異なって，行とか列に関して多重線型ではない．

この節の締めくくりに，2 つのコメントを付け加えておこう．シュトゥディ行列式を上では $\mathbb{H}$ を $\mathbb{C}^2$ と同一視して定義した．それでは $\mathbb{H}$ を $\mathbb{R}^4$ と同一視すればどうなるか？ 結局のところ，$\mathbb{H}$ の中心は $\mathbb{R}$ であって $\mathbb{C}$ ではないか

ら，四元数は $\mathbb{R}$-多元環を構成する．四元数行列 $M \in M(n, \mathbb{H})$ を $n \times n$ 実行列 A_0, A_1, A_2, A_3 を用いて $M = A_0 + iA_1 + jA_2 + kA_3$ と一意的に表すことができ，準同型写像 $\mu : M(n, \mathbb{H}) \to M(4n, \mathbb{R})$,

$$\mu(A_0 + iA_1 + jA_2 + kA_3) = \begin{pmatrix} A_0 & -A_1 & -A_2 & -A_3 \\ A_1 & A_0 & -A_3 & A_2 \\ A_2 & A_3 & A_0 & -A_1 \\ A_3 & -A_2 & A_1 & A_0 \end{pmatrix}$$

を適用する．ただし，注意しておくと

$$\phi\psi(A_0 + iA_1 + jA_2 + kA_3) = \begin{pmatrix} A_0 & -A_2 & -A_1 & A_3 \\ A_2 & A_0 & A_3 & A_1 \\ A_1 & -A_3 & A_0 & -A_2 \\ -A_3 & -A_1 & A_2 & A_0 \end{pmatrix}$$

$$\neq \mu(A_0 + iA_1 + jA_2 + kA_3)$$

であるが，いくつかの行，列，および，符号を入れ替えて，等式

$$\det{}_{\mathbb{R}}\, \mu(M) = \det{}_{\mathbb{R}}\, \phi\,(\psi(M)) = \mathrm{Sdet}(M)^2$$

が容易に得られる（[4] と [30] も参照のこと）．

もう一点を注意しておくと，一般に，

$$\psi({}^tM) = \psi({}^tA + j\,{}^tB) = \begin{pmatrix} {}^tA & -{}^t\bar{B} \\ {}^tB & {}^t\bar{A} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tB \\ -{}^t\bar{B} & {}^t\bar{A} \end{pmatrix} = {}^t\psi(M)$$

であるが，他方，

$$\psi(M^*) = \psi({}^t\bar{A} + \overline{j\,{}^tB}) = \psi({}^t\bar{A} - {}^t\bar{B}j)$$

$$= \psi({}^t\bar{A} - j\,{}^tB) = \begin{pmatrix} {}^t\bar{A} & {}^t\bar{B} \\ -{}^tB & {}^tA \end{pmatrix} = \psi(M)^*$$

が成り立つ．したがって，$\mathrm{Sdet}\, M^* = \overline{\mathrm{Sdet}\, M} = \mathrm{Sdet}\, M$ である．しかし以前に指摘したように，M が可逆で，しかも ${}^tM$ が可逆でないことがあるから，一般には，$\mathrm{Sdet}\, {}^tM \neq \mathrm{Sdet}\, M$ である．

デュドネ

シュトゥディの時代に四元数行列式を考察したのは彼に限ったわけではなかった．続く10年のうちに，A. ヘイティンク，E.H. ムーア，O. オーレ，および，A.R. リチャードソンがこの話題について書いている [25, 34, 36, 42, 43]．エイスタイン・オーレの論文 [36] は重要である．というのは，ここで非可換環に対して商の環の概念を導入しているからである．しかし行列式の観点からは，最も興味深いのが A.R. リチャードソンの論文 [42, 43] である．(これはリトルウッド–リチャードソン規則のリチャードソンであるが，リトルウッドの方はハーディ–リトルウッドのリトルウッドとは別人である.) 彼の主なる寄与は，交換子が主要な役割を演じることを明らかにしたことであった．彼の論文は交換子に関する公式で埋め尽くされている．

ひとまず $SL(n,\mathbb{H})$ の考察に立ち返って，補助定理 3 にさらに注目しよう．群 $SL(n,\mathbb{H})$ が $GL(n,\mathbb{H})$ の正規部分群であることは容易に確かめられるし，それが $GL(n,\mathbb{H})$ の交換子群であることも示される [1, 15, 17, 40].

補助定理 6. $SL(n,\mathbb{H}) = [GL(n,\mathbb{H}), GL(n,\mathbb{H})]$.

ついでながら指摘しておくと，体 k に対して，$GL(n,k)$ の交換子群は，$n=2$ で $k=\mathbb{Z}_2$ か $k=\mathbb{Z}_3$ の場合以外は，いずれも $SL(n,k)$ である [15].

補助定理 3 が重要である理由の主なるところは，我々が行列式を定義する場合に，行列 $D(x)$ に対してそうすれば十分であることが示されるからである．しかしここで補助定理 3 の分解の一意性に立ち戻らないと苛立つ読者も多いだろう．群 $SL(n,\mathbb{H})$ が $GL(n,\mathbb{H})$ の正規部分群であるから，問題は次のようになる．どのような $x\in\mathbb{H}$ に対して $D(x)$ は $SL(n,\mathbb{H})$ に含まれるか？ 解答は次の補助定理で与えられる．

補助定理 7. 対角行列

$$D(x) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & x \end{pmatrix}$$

が $GL(n, \mathbb{H})$ の交換子である［すなわち，$SL(n, \mathbb{H})$ に含まれる］ための必要十分条件は，x が乗法群 $\mathbb{H}^\times$ の交換子であることである．

証明. 片方の矢印については自明である．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & aba^{-1}b^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}.$$

しかし，反対方向は易しくはない．これはデュドネ行列式が問題なく定義されることを示すことと本質的に同値である．したがって，論文 [1], [17] あるいは [40] の結果から容易に導かれる．詳細については，読者にこれらの秀逸な情報源を指摘するにとどめる．

この補助定理から，分解 $A = D(x)B$ は x についても B についても一意的ではないこと，しかし剰余類 $x\,[\mathbb{H}^\times, \mathbb{H}^\times] \in \mathbb{H}^\times/[\mathbb{H}^\times, \mathbb{H}^\times]$ は一意的であること，がわかった．ジャン・デュドネが彼の 1943 年の論文 [17] で用いたのは正にこのことであった．彼の目的地は，行列式が群論の言葉でどのように表現され得るかを示すことであった．次の等式が成り立つと期待したくなるだろう：

$$\det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

しかしそうなら，行列式を可換環に値を持つ必要が生じるだろうし，したがって剰余群 $\mathbb{H}^\times/[\mathbb{H}^\times, \mathbb{H}^\times]$ に持ち込めば何とかなるだろう．彼の主定理は，どのような斜体 K に対しても同型写像

$$GL(n, K)/[GL(n, K), GL(n, K)] \to K^\times/[K^\times, K^\times]$$

が存在すると主張する．我々の $K = \mathbb{H}$ の場合は，これは補助定理 3 と 7 から直ちに得られる．したがって，ここではひとまずデュドネ行列式を

$$\det A = \det\left(D(x)B\right) = x\,[\mathbb{H}^\times, \mathbb{H}^\times]$$

によって定義しよう．補助定理 7 によって，これが問題なく定義され，その核がまさしく $SL(n, \mathbb{H})$ であることがわかる．すなわち，我々の定義による $SL(n, \mathbb{H})$ は，行列式が得られてしまえば，通常の場合のものと一致する．

ところがこれを $M(n,\mathbb{H})$ にまで拡張しようとするならば，行列式はその値を集合 $\mathbb{H}^\times/[\mathbb{H}^\times,\mathbb{H}^\times]\cup\{0\}$ にとることになる．しかし，この集合は何ものなのか？ 次の補助定理が必要である．

補助定理 8. 交換子群 $[\mathbb{H}^\times,\mathbb{H}^\times]$ は長さが 1 の四元数の集合と同型である．

証明. ここで，四元数 $x=a+ib+jc+kd$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ の長さは $|x|=\sqrt{x\bar{x}}=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ であった．交換子はすべて長さが 1 であることは明らかである．一方，長さが 1 の四元数は 3 次元球面 S^3 と同一視でき，$\psi(S^3)=SU(2)$ である．ところが，$SU(2)$ の元はすべて対角行列と共役である．よって，S^3 の元はすべて S^1，すなわち，$\mathbb{C}\subset\mathbb{H}$ の中の単位円，の元と共役である．(これはまたネーター–スコレームの定理からも得られる.）そこで $z\in S^3$ が与えられれば，それを $z=xyx^{-1}$, $y\in S^1$ と表すことができる．

次に，四元数はすべて 2 つの純四元数の積として表されることを見る．純四元数 $ib+jc+kd$, $b,c,d\in\mathbb{R}$ 全体を $\mathbb{R}^3$ と同一視する．さて，$p,q\in\mathbb{R}^3$ に対しては，$p^{-1}=\bar{p}/|p|^2=-p/|p|^2$ であり，また，

$$pq=-\langle p,q\rangle+p\times q$$

である．ただし，$\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbb{R}^3$ の通常の内積であり，$\times$ は $\mathbb{R}^3$ でのベクトル積である．これから，四元数はすべて 2 つの純四元数の積として表されることが容易に得られる．

さて，上のように $z\in S^3$ を $z=xyx^{-1}$, $y\in S^1$ と表す．ここで y は複素数であるから，$y=w^2$ となる $w\in\mathbb{C}$ を見つけることができる．そこで 2 つの純四元数 $p,q\in\mathbb{R}^3$ をとり，$w=pq$ と表す．また $|w|=|y|=1$ だから，$|p|=|q|=1$ としてよい．したがって，$\bar{p}=-p$, $\bar{q}=-q$ であり，$p^{-1}=-p$, $q^{-1}=-q$ である．ところがこのとき，

$$\begin{aligned} z=xpqpqx^{-1}&=xpq(-p)(-q)x^{-1}=xpqp^{-1}q^{-1}x^{-1}\\ &=(xpx^{-1})(xqx^{-1})(xpx^{-1})^{-1}(xqx^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

であり，z が交換子であることが示された．

別証については，[9], [17] および [50] を参照されたい．この補助定理から，$\mathbb{H}^\times/[\mathbb{H}^\times,\mathbb{H}^\times]$ は正の実数全体と同型であることがわかる．そこで

$$\omega:\mathbb{H}^\times/[\mathbb{H}^\times,\mathbb{H}^\times]\to\mathbb{R}^+,\qquad \omega(x\,[\mathbb{H}^\times,\mathbb{H}^\times])=|x|$$

と定義し，改めて正規化されたデュドネ行列式を

$$\mathrm{Ddet}(M)=\omega\left(\det(M)\right)$$

と定義する．デュドネ [17] は，我々の 3 つの公理を満たす行列式関数 d はいずれも何かある実数 $r\in\mathbb{R}$ によって

$$d(M)=\mathrm{Ddet}^r(M) \tag{5}$$

の形に表されることを示した．特に次の定理を簡単に確かめることができる．

定理 9. 上で見た行列式について次が成り立つ：

$$\mathrm{Sdet}\,M=\det_{\mathbb{C}}\left(\psi(M)\right)=\mathrm{Ddet}^2(M), \tag{6}$$

$$\det_{\mathbb{R}}\mu(M)=\det_{\mathbb{R}}\phi\left(\psi(M)\right)=\mathrm{Ddet}^4(M). \tag{7}$$

公式 (6) から，シュトゥディ行列式は縮約ノルム (reduced norm) と対応していることも注意しておく [15].

等式 (5) は L.E. ザゴリン [52] によって一般化された．準同型写像 $v:\mathbb{H}\to M(s,\mathbb{C})$ が与えられたとし，これによって対応する準同型写像 $\bar{v}:M(n,\mathbb{H})\to M(ns,\mathbb{C})$ を定義するとき，$\det_{\mathbb{C}}\bar{v}(M)=\mathrm{Ddet}^s(M)$ である．

我々の 3 つの公理に加えて，デュドネ行列式はいくつかの性質を満たす [1, 17, 40]．行列 I_n-2e_{jj} は I_n の j 番目の対角成分を 1 から -1 に置き換えたものであり，これを左から掛けると第 j 行だけが -1 倍される．したがって，行列 $P_{ij}=(I_n-2e_{jj})B_{ij}(1)B_{ji}(-1)B_{ij}(1)$ を左から掛けると，i 番目の行と j 番目の行とを入れ替えることになる．ところが $-1\in[\mathbb{H}^\times,\mathbb{H}^\times]$ であるから，$\det P_{ij}=1\,[\mathbb{H}^\times,\mathbb{H}^\times]$ である．すなわち，2 つの行を入れ替えてもデュドネ行列式は変わらない．

たとえば $n=2$ の場合，$a\neq 0$ ならば

$$\det\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & d-ca^{-1}b\end{pmatrix}=(ad-aca^{-1}b)\,[\mathbb{H}^\times,\mathbb{H}^\times]$$

であり，

$$\det\begin{pmatrix}0 & b\\ c & d\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}c & d\\ 0 & b\end{pmatrix}=cb\,[\mathbb{H}^\times,\mathbb{H}^\times]=-bc\,[\mathbb{H}^\times,\mathbb{H}^\times]$$

である．

また，ある行を左から m 倍する，あるいは，ある列を右から m 倍すると，行列式は $m\,[\mathbb{H}^\times,\mathbb{H}^\times]$ 倍される．(最後の掛け算は左からでも右からでもよい．というのは，$\mathbb{H}^\times/[\mathbb{H}^\times,\mathbb{H}^\times]$ は可換であるからである.）他方，

$$\det\begin{pmatrix}1 & a\\ b & ab\end{pmatrix}=(ab-ba)\,[\mathbb{H}^\times,\mathbb{H}^\times]$$

であるが，

$$b\,[\mathbb{H}^\times,\mathbb{H}^\times]\,\det\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & a\end{pmatrix}=0$$

であり，行の右からのスカラー倍は括り出せない．

しかも，加法に関してはこの行列式はうまく振る舞ってくれない．行列式を第1行 v の関数と見て，他の行は止めておく．この関数を $m(v)$ と書こう．剰余群 $\mathbb{H}^\times/[\mathbb{H}^\times,\mathbb{H}^\times]$ に加法を

$$a\,[\mathbb{H}^\times,\mathbb{H}^\times]+b\,[\mathbb{H}^\times,\mathbb{H}^\times]=\{ak_1+bk_2 \mid k_1,k_2\in[\mathbb{H}^\times,\mathbb{H}^\times]\}$$

で定義しよう．このとき，

$$m(v_1+v_2)\subset m(v_1)+m(v_2)$$

を示すことができる [1]．もし det の代わりに Ddet を用い，対応する第1行の関数を $M(v)$ と書くならば，一種の三角不等式

$$M(v_1+v_2)\leq M(v_1)+M(v_2)$$

が得られる．

ムーア

我々はケイリーの行列式で何がまずいのかを見ることから始めた．しかし，ときにはそれがうまく働く．一般には彼の式は意味をなさないことがわかっているというのに，ある種の行列に対しては意味を持つというのか？答えは，もしエルミート的な四元数行列 ($M^* = M$) に制限してしまえば，有用な関数が得られる．ただし，展開式の和の $n!$ 個の項の因子にある順序を特定する必要がある．これについてはエリアーキム・ヘイスティングズ・ムーア（彼に関する伝記的な情報は [37] を参照）が初めて検討した．彼の行列式を Mdet と書くことにする．

次数 n の（すなわち n 文字の）置換 σ をとる．それを共通文字を持たない巡回置換の積として表す．それぞれの巡回置換に現れる数字を巡回的に動かして，その中の 1 番小さい数字が最初に来るようにする．ついですべての巡回置換をその最初の数字が大きい方から順に大きさに従って並べ直す．言い換えれば，

$$\sigma = (n_{11} \cdots n_{1l_1})(n_{21} \cdots n_{2l_2}) \cdots (n_{r1} \cdots n_{rl_r})$$

で，各 i に対して $n_{i1} < n_{ij}\,(j > 1)$ であり，かつ $n_{11} > n_{21} > \cdots > n_{r1}$ とする．その上で，Moore 行列式を

$$\operatorname{Mdet} M = \sum_{\sigma \in S_n} |\sigma| m_{n_{11}n_{12}} \cdots m_{n_{1l_1}n_{11}} m_{n_{21}n_{22}} \cdots m_{n_{rl_r}n_{r1}}$$

によって定義する．もし H がエルミート的な行列であれば，$\operatorname{Mdet} H$ は実数である．ここでは詳細には踏み込まないが，ムーア，ジャコブソン，ダイソン，メータ，チェン，ヴァン・プラーグおよびピッチンニの論文 [5, 11, 12, 20, 21, 27, 28, 32, 33, 34, 39, 49, 50] を参照されたい．とはいえ，いくらかのコメントをしておこう．

一般には，四元数行列の固有値について述べるのは困難である [13, 29]．我々は右線型空間を扱っているから，右固有値を考えなければならない．そこで，

$$Mx = x\lambda$$

とすると，$q \neq 0$ に対して

$$M(xq) = x\lambda q = (xq)q^{-1}\lambda q$$

を得る．したがって，λ のすべての共役元も固有値である．

そこで共役類について少し踏み込んで見よう．四元数 $q \in \mathbb{H}$ に対して，写像 $\rho(q)$ を $\rho(q)(x) = qxq^{-1}$ で定義する．このとき，$\rho(q)$ は実数軸を不変に保ち，直交変換であるから，純四元数の空間 $\mathbb{R}^3$ へ制限することができる．容易にわかるように [18]，$q = q_0 + q'$, $q_0 \in \mathbb{R}$, $q' \in \mathbb{R}^3$ と分解すると，$\rho(q)$ は $\mathbb{R}^3$ の回転で，軸は q'，角度は $2\arctan(|q'|/q_0)$ である．これから，もし x が実数であれば，x の共役類は単に $\{x\}$ である．ところが $x \in S^3 - \{\pm 1\}$ に対しては，その共役類は実数軸に直交する S^2 のコピーであって x を含むものである．さて $\lambda = \lambda_0 + \lambda'$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda' \in \mathbb{R}^3$ としよう．このとき，$q\lambda q^{-1} = \lambda_0 + q\lambda' q^{-1}$ で，λ' の共役類は i 軸と $\pm|\lambda'|\,i$ の 2 点で交わる．したがって，実数以外の固有値の共役類はちょうど 2 個の複素数を含み，それらは互いに共役である．

複素数 p と $v = u + jw$ に対しては，$Mv = vp$ であるための必要十分条件は，

$$\psi(M)\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} p$$

であり，また $\psi(M)$ の固有値は共役複素数の対として現れることが，数学的帰納法によって証明できる [29]．したがって，$\psi(M)$ の固有値はちょうど $2n$ 個の複素数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ と $\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_n}$ であり，これに対応して M の固有値は $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ の共役類の要素である．ただし，各 λ_i は $\overline{\lambda_i}$ で置き換えても構わない．

ここまで来れば次を示すのは容易である [29]．行列 M は三角行列とシンプレクティックに相似であり，対角成分 d_i は λ_i か $\overline{\lambda_i}$ に等しいようにできる．四元数行列の標準形についてのさらなる情報は [27], [29], [41], [45] および [51] を参照されたい．

さて，考察をエルミート行列 H に限ろう．この場合，H の固有値はすべて実数である.（したがって，各共役類はただ 1 つの要素からなっているから，個数もちょうど n 個である.）さらに，行列はシンプレクティックに対角化で

きる．すなわち，${}^t\bar{P} = P^{-1}$ を満たすような行列 $P \in GL(n, \mathbb{H})$ を適当に選べば，

$$PH{}^t\bar{P} = D$$

で，D が実の対角行列になるようにできる．

これでムーア行列式と他の行列式を関係づける次の定理を証明することができる．

定理 10. 四元数エルミート正方行列 H に対して，

$$|\mathrm{Mdet}\, H| = \mathrm{Ddet}\, H \quad \text{および} \quad \mathrm{Mdet}\, H\, [\mathbb{H}^\times, \mathbb{H}^\times] = \det H \tag{8}$$

が成り立つ．またどのような四元数正方行列 M に対しても，

$$\mathrm{Sdet}\, M = \mathrm{Mdet}(MM^*) \tag{9}$$

が成り立つ．

証明. エルミート行列に対しては，ムーア行列式は固有値の積と等しいことが示せる．よって $\mathrm{Mdet}\, H$ は実数値である．他方，対角行列の正規化デュドネ行列式は対角成分の積のノルムである．よって (8) が得られる．次に (9) を証明するには単に MM^* の固有値が正であることに注目して，積の法則と (6) を用いればよい．

最後に，H がエルミート行列であれば，

$${}^t(J\psi(H)) = -{}^t\psi(H)J = -J\overline{{}^t\psi(H)} = -J\psi(H)$$

であり，したがって，$J\psi(H)$ は歪対称であるから，そのパフ形式をとることができる [14]．ところが，

$$\mathrm{pf}\,(-J\psi(H))^2 = \det_{\mathbb{C}}(-J\psi(H)) = \mathrm{Ddet}^2 H = \mathrm{Mdet}^2 H$$

であり，よって

$$\mathrm{Mdet}(H) = \mathrm{pf}\,(-J\psi(H))$$

が得られる．パフ形式の他の応用については [2] と [3] を参照されたい．

$SP(n)$

締めくくりとして，これらのアイデアの簡単な応用について触れる.「はじめに」で述べたように，群 $SP(n)$ は $\mathbb{H}^n$ 上の内積を保つ変換群として定義することができる．しかしこの群の通常の記述では，ψ によるその $M(n,\mathbb{C})$ への像として考えられている．これらの行列の行列式は，容易に確かめられるように，± 1 である．事実としては，この行列式は 1 であり，いくつかの証明法があるが，これは上記の結果からも示される．というのは，$\psi(GL(n,\mathbb{H}))$ に含まれる行列はすべて正の行列式を持っているからである．

結語として，ゲルファント–レタクによる最近の論文 [22] も指摘しておく．残念ながら，その内容に立ち入ることはこの論説の域を超えている．

参考文献

[1] E. Artin, *Geometric Algebra*, New York: Interscience, 1957; reprinted by Wiley, New York, 1988.

[2] H. Aslaksen, $SO(2)$ invariants of a set of 2×2 matrices. *Math. Scand.* 65 (1989), 59–66.

[3] H. Aslaksen, E.-C. Tan, and C. Zhu, Invariant theory of special orthogonal groups, *Pacific J. Math.* 168 (1995), 207–215.

[4] A. Bagazgoitia, A determinantal identity for quaternions, in *Proceedings of the 1983 Conference on Algebra Lineal y Aplicationes, Vitoria-Gasteiz, Spain*, 1984, 127–132.

[5] R. W. Barnard and E. Hastings Moore, *General analysis, Part 1*, Memoirs of the American Philosophical Society, 1935.

[6] J. Brenner, Expanded matrices from matrices with complex elements, *SIAM Rev.* 3 (1961), 165–166.

[7] J. Brenner, Applications of the Dieudonné determinant, *Linear Algebra Appl.* 1 (1968), 511–536.

[8] J. Brenner, Corrections to "Applications of the Dieudonné determinant," *Linear Algebra Appl.* 13 (1976), 289.

[9] J. Brenner and J. De Pillis, Generalized elementary symmetric functions and quaternion matrices, *Linear Algebra Appl.* 4 (1971), 55–69.

[10] A. Cayley, On certain results relating to quaternions, *Philos. Mag.* 26 (1845), 141–145; reprinted in *The Collected Mathematical Papers Vol. 1*,

Cambridge: Cambridge University Press, 1989, 123–126.

[11] L. Chen, Definition of determinant and Cramer solution over the quaternion field, *Acta Math. Sinica (N.S.)* 7 (1991), 171–180.

[12] L. Chen, Inverse matrix and properties of double determinant over quaternion field, *Sci. China Ser. A* 34 (1991), 528–540.

[13] P. M. Cohn, The similarity reduction of matrices over a skew field, *Math. Z.* 132 (1973), 151–163.

[14] P. M. Cohn, *Algebra, vol. 1*, 2nd ed., New York: Wiley, 1991.

[15] P. M. Cohn, *Algebra, vol. 3*, 2nd ed., New York: Wiley, 1991.

[16] M. L. Curtis, *Matrix Groups*, New York: Springer-Verlag, 1979; 1984.

[17] J. Dieudonné, Les déterminants sur un corps non-commutatif, *Bull. Soc. Math. France* 71 (1943), 27–45.

[18] J. Dieudonné, *Special Functions and Linear Representations of Lie Groups*, CBMS 42, Providence, RI, American Mathematical Society, 1980.

[19] R. Dimitrić and B. Goldsmith, Sir William Rowan Hamilton, *Math. Intelligencer* 11 (1989), no. 2, 29–30.

[20] F. J. Dyson, Correlations between eigenvalues of a random matrix, *Commun. Math. Phys.* 19 (1970), 235–250.

[21] F. J. Dyson, Quaternion determinants, *Helv. Phys. Acta* 45 (1972), 289–302.

[22] I. M. Gelfand and V. S. Retakh, Determinants of matrices over noncommutative rings, *Functional Anal. Appl.* 25 (1991), 91–102.

[23] F. Reese Harvey, *Spinors and Calibrations*, New York: Academic Press, 1990.

[24] W. R. Hamilton, *Elements of Quaternions*, 2nd ed., London: Longman, 1889.

[25] A. Heyting, Die Theorie der linearen Gleichungen in einer Zahlenspezies mit nichtkommutativer Multiplikation, *Math. Ann.* 98 (1927), 465–490.

[26] M. H. Ingraham, A note on determinants, *Bull. Amer. Math. Soc.* 43 (1937), 579–580.

[27] N. Jacobson, Normal semi-linear transformations, *Amer. J. Math.* 61 (1939), 45–58.

[28] N. Jacobson, An application of E. H. Moore's determinant of a Hermitian matrix, *Bull. Amer. Math. Soc.* 45 (1939), 745–748.

[29] H. C. Lee, Eigenvalues and canonical forms of matrices with quaternionic entries, *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A*, 52 (1949), 253–260.

[30] D. W. Lewis, A determinantal identity for skewfields, *Linear Algebra Appl.* 7 (1985), 213–217.